TITLE:

Analytic properties of a certain multiple Dirichlet series (Analytic number theory and related topics)

AUTHOR(S):

岡本, 卓也

CITATION:

岡本, 卓也. Analytic properties of a certain multiple Dirichlet series (Analytic number theory and related topics). 数理解析研究所講究録 2010, 1710: 53-59

ISSUE DATE:

2010-08

URL:

http://hdl.handle.net/2433/170199

数理解析研究所講究録
第 1710 巻 2010 年 53-59

Analytic properties of a certain multiple Dirichlet series

岡本卓也（Takuya Okamoto）
名古屋大学多元数理科学研究科
Graduate School of Mathematics, Nagoya University

多重ゼータ関数にはいろいろな型が存在し，解析的性質（解析接続，singularity, 関数関係式など）を考察する研究は盛んに行われている．解析接続にもいろいろな方法がある．Zhao の方法 [5] は Gel'fand-Shilov の一般関数の理論に基づくものであり，Akiyama-Egami-Tanigawa の方法 [1] は Euler-Maclaurin summation を用いる．そして，Matsumoto[3] は Mellin-Barnes 積分を用いる方法により解析接続を与えた．また，多重ゼータ関数の分母に係数を乗せ，その多重 Dirichlet 級数の性質を考察する研究も盛んに行われている．分母に乗せる係数が指標のようにある周期を持っているのならば，その周期で分けることで多重ゼータ関数の線形和とし表すことでその解析的性質を調べることができる．では，次の問題は”周期を持たない数論的関数を乗せ，その解析的性質を調べることができないだろうか？”ということである．これは Dedekind 関数や Dirichlet 級数の多重化を考えるにあたり当然の疑問である．そこで本稿では周期を持たない数論的関数を乗せた多重 Dirichlet 関数の解析的性質を考察することを目標とする．

まずは，多重 Dirichlet 関数（周期を持たない数論的関数を分母に乗せた関数）についてこれまでに知られている結果を述べる．Matsumoto-Tanigawa [4] は $r \in \mathbb{N}$ に対して

$$\sum_{m_1,\ldots,m_r=1}^{\infty} \frac{a_1(m_1)\cdots a_r(m_r)}{m_1^{s_1}(m_1+m_2)^{s_2}\cdots(m_1+\cdots+m_r)^{s_r}} \tag{1}$$

という多重 Dirichlet 関数を定義し，その解析的性質を考察した．ただし，ここでは $a_k(m_k)$ $(1 \leq k \leq r)$ は複素係数，$s_1,\ldots,s_r$ は複素変数とする．この解析的性質は

$$L_k(s) := \sum_{n=1}^{\infty} a_k(n) n^{-s} \qquad (1 \leq k \leq r) \tag{2}$$

の解析的性質に帰着し，彼らは Mellin-Barnes 積分を用いることで任意の k に対して (2) が整関数ならば (1) も整関数であること示し，また，(2) が特異点を持つときは (1) はある possible singularities を除いて正則であることも示した．

この他には，F を代数体，$\mathcal{O}_F$ をその整数環とし，F の整イデアル I に対して $N_{F/\mathbb{Q}}I = |\mathcal{O}_F : I|$ とする．このとき，r は固定された変数，$F_1,\ldots,F_r$ を代数体，$s_1,\ldots,s_r$ を複素変数とするとき Masri [2] は次のような多重 Dirichlet 級数を導入した．

$$\sum_{\substack{1\le N_{F_1/\mathbb{Q}}I_1<\cdots<N_{F_r/\mathbb{Q}}I_r<\infty \\ I_1\subset\mathcal{O}_{F_1},I_2\subset\mathcal{O}_{F_2},\ldots,I_r\subset\mathcal{O}_{F_r}}}\cdots\sum (N_{F_1/\mathbb{Q}}I_1)^{-s_1}(N_{F_2/\mathbb{Q}}I_2)^{-s_2}\cdots(N_{F_r/\mathbb{Q}}I_r)^{-s_r}. \tag{3}$$

そして，彼は (3) の絶対収束領域を求めた．また，彼は k を 1 または r で固定し，$F_i = \mathbb{Q}$ $(i \neq k)$ とし，

$$a(m_i) = |\{\{0\} \neq I \subset \mathcal{O}_{F_i} \mid (N_{F_i/\mathbb{Q}}I) = m_i\}|$$

とおき，

$$L_{r,1}((s_1,\ldots,s_r);a) = \sum_{1\le m_1<\cdots<m_r<\infty}\cdots\sum a(m_1)m_1^{-s_1}m_2^{-s_2}\cdots m_r^{-s_r} \tag{4}$$

と

$$L_{r,r}((s_1,\ldots,s_r);a) = \sum_{1\le m_1<\cdots<m_r<\infty}\cdots\sum a(m_r)m_1^{-s_1}m_2^{-s_2}\cdots m_r^{-s_r} \tag{5}$$

という多重 Dirichlet 級数を定義し，Euler-Maclaurin summation を用いることでその解析接続，possible singularities や関数関係式を与えた．ここで，(4) は (1) の特別な場合と見なせるが，(5) は (1) の特別な場合ではないことに注意する．

本稿では (4) と (5) に着目し，この一般化を考える．まずは $s = \sigma + it$ を複素変数とする．このとき，複素係数 $a(n)$ を用いて次のように Dirichlet 級数を定義する．

$$L(s) = \sum_{n=1}^{\infty} a(n)n^{-s}.$$

このとき，以下のことを仮定する．

(i) $L(s)$ は $\sigma > 1 + \epsilon > 1$ で広義一様絶対収束する，

(ii) $L(s)$ は $\mathbb{C}$ に有理型に解析接続され，$s = 1$ でのみ位数 1 の極を持つ．

そして r を正の整数で 1 つ固定して，上で定義した複素係数 $a(n)$ を持つ次のような多重 Dirichlet 級数を導入する．

$$L_{r,i}((s_1,\ldots,s_r);a) = \sum_{1\le m_1<\cdots<m_r<\infty}\cdots\sum a(m_i)m_1^{-s_1}m_2^{-s_2}\cdots m_r^{-s_r}, \tag{6}$$

ただし，$s_k = \sigma_k + it_k$ $(1 \le k \le r)$ とする．

注意.1　$L(s)$ の仮定 (i) は (6) の絶対収束領域に関する条件であり，別に変えることもできる．

注意.2　$L(s)$ の仮定 (ii) は (6) の singularities に関する条件であり，今回は (4) と (5) の一般化を考えるためこのような極の取り方にしたが別にこの条件も変えることができる．しかし，この条件を変えると (6) の singularities は変わることに注意する．

注意.3　$i = 1, r$ とすると (6) は (4) と (5) となる．

(6) の絶対収束領域に関する結果は次の通りである．

Proposition 1.
i を 1 つ固定し，領域 $A_{r,i}$ と $B_{r,i}$ を次のようにおく．

$$A_{r,i} = \{(s_1, \ldots, s_r) \in \mathbb{C}^r \mid \Re(s_{r-k+1} + \cdots + s_r) > k + \epsilon (r - i + 1 \leq k \leq r)\}$$
$$B_{r,i} = \{(s_1, \ldots, s_r) \in \mathbb{C}^r \mid \Re(s_{r-k+1} + \cdots + s_r) > k \ (1 \leq k \leq r - i)\}.$$

このとき，級数 *(6)* は領域 $A_r \cap B_r$ で広義一様絶対収束する．

これは [2] の Proposition 1.1 より明らかである．ここで，$\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$ とする．また，(6) の解析的性質として次の結果を得た．

Theorem 1.

(1) 級数 *(6)* は $s_1, \ldots, s_r$ の関数として，全 $\mathbb{C}^r$ 空間に有理型で解析接続される．

(2) 関数 $L_{r,i}$ は次の等式の 1 つにより定義される $\mathbb{C}^r$ 空間の部分空間にのみ存在する *possible singularities* を除いて正則である．

$$s_r = 1,$$
$$s_r + s_{r-1} = 2, 1, -2n \quad (n \in \mathbb{N}_0),$$
$$s_r + s_{r-1} + s_{r-2} = 3 - n \quad (n \in \mathbb{N}_0),$$
$$\cdots$$
$$s_r + \cdots + s_r = r - n \quad (n \in \mathbb{N}_0).$$

Theorem 1 の (2) の結果では possible singularities となっているが，より詳しい考察 ([1] で導入された changing variables の方法など) を行うとそれが true singularities になることを示すことができる．それが次の結果である．

Theorem 2.

関数 $L_{r,i}$ は次の等式の 1 つにより定義される $\mathbb{C}^r$ 空間の部分空間にのみ存在する *true singularities* を除いて正則である.

$$\begin{aligned} s_r &= 1, \\ s_r + s_{r-1} &= 2, 1, -2n \quad (n \in \mathbb{N}_0), \\ s_r + s_{r-1} + s_{r-2} &= 3 - n \quad (n \in \mathbb{N}_0), \\ &\cdots \\ s_r + \cdots + s_1 &= r - n \quad (n \in \mathbb{N}_0). \end{aligned}$$

ここで, possible singularities と true singularities の定義を確認しておく. ある空間が possible singularities とはその空間上に singularity があるかもしれないし, ないかもしれないということである. また, ある空間が true singularities とはその空間上に少なくても 1 点は singularity があるということである. この定義だけを述べると possible singularities とはどのようなときに用いるかがわからないかもしれないので, 1 つ possible singularities と true singularities の例を挙げる.

例. まず, $s_1, s_2 \in \mathbb{C}$ に対して

$$f(s_1, s_2) = L(s_2)\zeta(s_1) - L_{2,1}((s_2, s_1); a) \tag{7}$$

とおく. このとき, Theorem 2 と $L(s)$ やリーマンゼータ関数の性質より $f(s_1, s_2)$ は

$$\begin{aligned} s_1 = 1, s_2 &= 1, \\ s_2 + s_1 &= 2, 1, -2n \quad (n \in \mathbb{N}_0). \end{aligned}$$

で singularities になる可能性がある. これは possible singularities である. ここで, $s_1 = 1$ は (7) の右辺の第 1 項と第 2 項から現れている. しかし, $L_{2,1}((s_2, s_1); a)$ に Mellin-Barnes 積分を用いてあげることでそれらの singularities が互いに打ち消し合っていることがわかる. よって, $s_1 = 1$ は見かけ上 singularity のように思えたが実際は singularity にはなっていない. また, それ以外の possible sigularities は恒等的に消えないこともわかる. よって, $f(s_1, s_2)$ の true singularities は

$$\begin{aligned} s_2 &= 1, \\ s_2 + s_1 &= 2, 1, -2n \quad (n \in \mathbb{N}_0). \end{aligned}$$

となる.

このように多変数になると sinigularity が見かけ上現れることが多く, そしてそれが本当に singularity になるかを見ることは変数の個数が多くなるとより難しくなることがわ

かってもらえただろう．次に Theorem 2 の証明のスケッチを紹介する．

この証明は帰納法で行う．まずは $i = 1$ とし，r に関する帰納法で $L_{r,1}$ に対して Theorem 2 が成り立つことを示し，次にその結果と Theorem 1 の結果を用いることにより $i = r$ のときを r に関する帰納法で証明する．そして，$i = r$ のときに用いた方法を真似ることにより $i = r-1, r-2, \ldots, 2$ に対して Theorem 2 を示すことができる．ただし，$i = r-1, r-2, \ldots, 2$ を示すときはスタート地点を注意する必要がある．例えば，$i = r-1$ のときは $r = 2$ からスタートするがこのときは $L_{2,1}$ について示すのだが，これはすでに $i = 1$ について示してあるから後は $L_{r,r-1}$ を示すだけであり，これは $L_{r,r}$ のときと同様に示せる．

ここでは $i = r$ のときで $L_{r-1,r-1}$ まで Theorem 2 を仮定し $L_{r,r}$ について Theorem 2 を示す．まず，和をうまく入れ替え Mellin-Barnes 積分を用いることで

$$
\begin{aligned}
&L_{r,r}((s_1,\ldots,s_r);a) \\
=&L_{r-1,r-1}((s_2,\ldots,s_r);a)\zeta(s_1) - L_{r-1,r-1}((s_1+s_2,s_3,\ldots,s_r);a) \\
&-\frac{1}{s_1-1}L_{r-1,r-1}((s_1+s_2-1,s_3,\ldots,s_r);a) \\
&-\sum_{l=0}^{N-1}\binom{-s_1}{l}L_{r-1,r-1}((s_1+s_2+l,s_3,\ldots,s_r);a)\zeta(-l) \\
&-\frac{1}{2\pi i}\int_{(N-\eta)}\frac{\Gamma(s_1+z)\Gamma(-z)}{\Gamma(s_1)}L_{r-1,r-1}((s_1+s_2+z,s_3,\ldots,s_r);a)\zeta(-z)dz, \qquad (8)
\end{aligned}
$$

を得る．ただし，N は任意の正の整数，η は小さい正の数とする．このとき，(8) の第 1，2，3，4 項からそれぞれ

$$
\begin{cases}
s_r & = 1 \\
s_r + s_{r-1} & = 2, 1, -2n \quad (n \in \mathbb{N}_0), \\
s_r + s_{r-1} + s_{r-2} & = 3 - n \quad (n \in \mathbb{N}_0), \\
 & \cdots \\
s_r + \cdots + s_2 & = r - 1 - n \quad (n \in \mathbb{N}_0),
\end{cases} \qquad (9)
$$

$$
\begin{cases}
s_r & = 1 \\
s_r + s_{r-1} & = 2, 1, -2n \quad (n \in \mathbb{N}_0), \\
s_r + s_{r-1} + s_{r-2} & = 3 - n \quad (n \in \mathbb{N}_0), \\
 & \cdots \\
s_r + \cdots + s_3 & = r - 2 - n \quad (n \in \mathbb{N}_0), \\
s_r + \cdots + s_2 + s_1 & = r - 1 - n \quad (n \in \mathbb{N}_0),
\end{cases} \qquad (10)
$$

$$\begin{cases} s_r & = 1 \\ s_r + s_{r-1} & = 2, 1, -2n \quad (n \in \mathbb{N}_0), \\ s_r + s_{r-1} + s_{r-2} & = 3 - n \quad (n \in \mathbb{N}_0), \\ & \cdots \\ s_r + \cdots + s_3 & = r - 2 - n \quad (n \in \mathbb{N}_0), \\ s_r + \cdots + s_2 + s_1 - 1 & = r - 1 - n \quad (n \in \mathbb{N}_0), \end{cases} \tag{11}$$

$$\begin{cases} s_r & = 1 \\ s_r + s_{r-1} & = 2, 1, -2n \quad (n \in \mathbb{N}_0), \\ s_r + s_{r-1} + s_{r-2} & = 3 - n \quad (n \in \mathbb{N}_0), \\ & \cdots \\ s_r + \cdots + s_3 & = r - 2 - n \quad (n \in \mathbb{N}_0), \\ s_r + \cdots + s_2 + s_1 + l & = r - 1 - n \quad (n, l \in \mathbb{N}_0), \end{cases} \tag{12}$$

という possible singularities が現れる．(9) から決まる $s_r + \cdots + s_2 = r - 1 - n$ と (10), (11), (12) から決まる $s_r + \cdots + s_2 + s_1 = r - 1 - n$ は $L_{r,r}$ の true singularities ということは changing variable などを用いることで簡単にわかる．だから，後は

$$\begin{cases} s_r & = 1 \\ s_r + s_{r-1} & = 2, 1, -2n \quad (n \in \mathbb{N}_0), \\ s_r + s_{r-1} + s_{r-2} & = 3 - n \quad (n \in \mathbb{N}_0), \\ & \cdots \\ s_r + \cdots + s_3 & = r - 2 - n \quad (n \in \mathbb{N}_0). \end{cases} \tag{13}$$

を考えればよい．まずは $s_r = 1$ について見る．このときは和を入れ替えることによって得られる

$$\begin{aligned} &\zeta_{EZ,r-1}(s_1, \ldots, s_{r-1}) L(s_r) \\ &= L_{r,r}((s_1, \ldots, s_r); a) + \sum_{i=1}^{r-1} L_{r-1,i}((s_1, \ldots, s_i + s_r, \ldots, s_{r-1}); a) \\ &\qquad + \sum_{k=2}^{r-1} L_{r,k}((s_1, \ldots, s_{k-1}, s_r, s_k \ldots, s_{r-1}); a) \\ &\qquad\qquad - L_{r,1}((s_r, s_1, \ldots, s_{r-1}; a). \end{aligned} \tag{14}$$

という関係式より $s_r = 1$ が true singularity になることがわかる．ただし，$r \in \mathbb{N}$, $s_1, \ldots, s_r \in \mathbb{C}$ に対して

$$\zeta_{EZ,r}(s_1, \ldots, s_r) = \sum_{1 \leq m_1 < \cdots < m_r < \infty} \cdots \sum m_1^{-s_1} m_2^{-s_2} \cdots m_r^{-s_r}$$

と定義する．実際，$L(s)$ と $\zeta_{EZ,r}$ の事実（[1] の Theorem 1 ）より，(14) の左辺の true singularities は

$$
\begin{gathered}
s_r = 1 \\
s_{r-1} = 1 \\
s_{r-1} + s_{r-2} = 2, 1, -2n \quad (n \in \mathbb{N}_0), \\
\cdots \\
s_{r-1} + \cdots + s_1 = r - 1 - n \quad (n \in \mathbb{N}_0).
\end{gathered}
$$

で与えられることがわかる．しかし, (14) の右辺は初項のみ $s_r = 1$ を possible singularity として持つ．よって，$s_r = 1$ は $L_{r,r}$ の true singularity となる．同様な方法で (13) が全て $L_{r,r}$ の true singularities となることがわかる．□

最後に今後の最大の課題を挙げておく．$a_1, \ldots, a_r$ を数論的関数とし，複素変数 $s_1, \ldots, s_r$ に対して

$$
L_r((s_1, \ldots, s_r); (a_1, \ldots, a_r)) = \sum_{1 \leq m_1 < \cdots < m_r < \infty} \cdots \sum \frac{a_1(m_1) \cdots a_r(m_r)}{m_1^{s_1} \cdots m_r^{s_r}}
$$

という (6) を含んでいる多重 Dirichlet 関数を定義する．このとき，この関数の解析接続などを与えるということである．これには最初に述べた，これまでに知られている解析接続の方法を用いることはできない．それは分母の $m_1 + \cdots + m_r$ をうまく分離できないことが問題となっている．

このような多重 Dirichlet 関数を考えることは自然な着想であり，この解析的性質がわかれば (1) と比べることでおもしろい結果を得られると考えている．

参考文献

[1] S. Akiyama, S. Egami and Y. Tanigawa, Analytic continuation of multiple zeta functions and their values at non-positive integers, Acta Arith, 98 (2001), 107-116.

[2] R. Masri, Multiple Dedekind zeta functions and evaluations of extend multiple zeta values, J. Number Theory, 115 (2005), 295-309.

[3] K. Matsumoto, Asymptotic expansions of double zeta-functions of Barnes, of Shintani, and Eisenstein series, Nagoya Math. J., 172 (2003), 59-102.

[4] K. Matsumoto and Y. Tanigawa, The analytic continuation and the order estimate of multiple Dirichlet series, J. Théor. Nombres Bordeaux 15 (2003), 267-274.

[5] J. Zhao, Analytic continuation of multiple zeta functions, Proc. Amer. Math. Soc., 128 (2000), 1275-1283.